Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas VI (MA-2113)
2^{do} Examen Parcial (35 %)
Verano 2015

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (7 pts.) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por:

$$f(z) = \operatorname{sen}(x^2 - y^2)\cosh(2xy) + i\cos(x^2 - y^2)\operatorname{senh}(2xy)$$

Determinar si f es analítica en algún subconfunto de $\mathbb{C}$. En caso afirmativo, expresar f como una función elemental que depende solo de z.

2. (10 pts.) Si z, ω son dos complejos que satisfacen el sitema de ecuaciones

$$\begin{cases} 2e^z + 3\operatorname{sen}(\omega) = 5i \\ 3e^z - 2\operatorname{sen}(\omega) = i \end{cases}$$

hallar todas las soluciones de dicho sitema como un par ordenado (z, ω). (Observación: ¡ambas coordenadas complejas tienen infinitas soluciones!)

3. (8 pts.) Sea $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ la raíz cúbica primitiva de la unidad.
   (a) Demostrar que la factorización clásica en variable real $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ se convierte en $a^3 - b^3 = (a - b)(a - b\omega)(a - b\omega^2)$ para $a, b \in \mathbb{C}$ (Sugerencia: completar cuadrados con el polinomio cuadrático y reconocer $b\omega$ y $b\omega^2$ en esta factorización)
   (b) Usar la factorización anterior para resolver el $\displaystyle\lim_{x \to e^{\frac{2\pi i}{3}}} \frac{z^3 - 1}{z - e^{\frac{2\pi i}{3}}}$

4. (10 pts.) Sea Ω la banda semi-infinita definida por $\Omega\{x + iy \,|\, |x| \leq \frac{\pi}{2}, y \geq 0\}$, y sea $f(z) = \cos z$. Estudiar el mapeo de Ω por medio de f, estudiando cómo son las curvas $f(\gamma_1)$ y $f(\gamma_2)$, si γ_1 y γ_2 son segmentos de rectas horizontales y verticales, respectivamente, sobre Ω